LECȚII DE SINTEZĂ

în vederea pregătirii sesiunii iulie-august a examenului de

BACALAUREAT 2012 - M2

pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică,
profil: servicii, resurse naturale şi protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

MATEMATICĂ

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)

Argument:

Prezentul breviar teoretic are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim / mediu de competență şi nu reprezintă o listă exhaustivă. De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență, funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.1.1. Mulțimi şi elemente de logică - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.1.2. Mulțimi de numere – clasa a X-a (3h/săpt.)
1.1.3. Şiruri – clasa a IX-a (2h/săpt.)

1.1.1. Mulțimi şi elemente de logică - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Mulțimi de numere: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; proprietate $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; apartenența rezultatului unui calcul numeric la o mulțime dată (de exemplu: produsul a două numere nenule, unul rațional şi unul irațional, este un număr irațional).

Reguli de calcul cu numere reale vizând:

- asociativitatea: $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- comutativitatea: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$
- elementul neutru: $a+0=0+a=a$; $a\cdot 1=1\cdot a=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$
- elemente simetrizabile: $a+(-a)=(-a)+a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$; $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- distributivitatea: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- alte proprietăți: $a\cdot 0=0\cdot a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

Ordonarea numerelor reale: $a<b$; proprietăți: $a<b \Leftrightarrow a\cdot x<b\cdot x$, $\forall x>0$; $a<b \Leftrightarrow a\cdot x>b\cdot x$, $\forall x<0$; $a<b \Leftrightarrow a+x<b+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $a^2<b^2 \Leftrightarrow |a|<|b|$; $a<b$ şi $b<c \Rightarrow a<c$ (tranzitivitate); $a\le b$ şi $a\ge b \Leftrightarrow a=b$ (antisimetrie).

Modulul unui număr real x : $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$; proprietăți: $|x|\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$; $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$; $|-x|=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$; $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $|x+y|\ge|x|+|y|$; $|x|=|y| \Rightarrow x=y$ sau $x=-y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Aproximări prin lipsă / adaos: de exemplu, utilizarea aproximărilor pentru încadrarea unui număr real între doi întregi consecutivi.

Intervale de numere reale: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} / a<x<b\}$; $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a\le x\le b\}$;

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,/\,a<x\le b\}$; $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,a\le x<b\}$; $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<b\}$; $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,a<x\}$; $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le b\}$; $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,a\le x\}$.

Operații cu mulțimi de numere reale: reuniune $A\cup B=\{x\,/\,x\in A \text{ sau } x\in B\}$; intersecție $A\cap B=\{x\,/\,x\in A \text{ şi } x\in B\}$.

Operații logice elementare, cuantificatori, exemple:

- negația unei propoziții logice adevărate reprezintă o propoziție logică falsă;
- utilizarea conjuncției a două predicate în rezolvarea de sisteme;
- utilizarea disjuncției a două predicate în abordarea rezolvării unei probleme pe cazuri;
- utlizarea implicației sau echivalenței în elaborarea argumentării logice într-o demostrație.

1.1.2. Mulțimi de numere - clasa a X-a (3h/săpt.)

Puteri cu exponent întreg: $a^n=\underbrace{a......a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ pentru $a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$, $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ pentru $a\in\mathbb{R}^*, n\in\mathbb{N}$.

Proprietăți: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, $(ab)^m=a^m\cdot b^m$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$, $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$, cu aplicarea formulelor în condiții de bună definire.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1,a_2,...,a_n$ este $m_a=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Media artimetică ponderată a numerelor reale $a_1,a_2,...,a_n$, care au respectiv ponderile $p_1,p_2,...,p_n$, este $m_{ap}=\dfrac{a_1p_1+a_2p_2+...+a_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}$.

Media geometrică a două numere reale pozitive a şi b este $m_g=\sqrt{a\cdot b}$.

Media armonică a două numere reale pozitive nenule a, b este $m_h=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Inegalitatea mediilor: $\min\{a;b\}\le\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{a\cdot b}\le\dfrac{a+b}{2}\le\max\{a;b\}$, unde a şi b sunt numere reale pozitive nenule

Radical de ordin 2 dintr-un număr real pozitiv: $\sqrt{a}, a\ge 0$; proprietăți: $\sqrt{a^2}=|a|, \forall a\in\mathbb{R}$; $\sqrt{a}\ge 0, \forall a\ge 0$; $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \forall a,b\ge 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a\ge 0, \forall b>0$, $\left(\sqrt{a}\right)^m=\sqrt{a^m}=a^{\frac{m}{2}}$, $\forall a\ge 0, m\in\mathbb{N}^*$, raționalizarea numitorului: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}, \forall a>0$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}, \forall a,b>0$.

Radical de ordin 3 dintr-un număr real: $\sqrt[3]{a}, a\in\mathbb{R}$; proprietăți: $\sqrt[3]{a^3}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a, \forall a\in\mathbb{R}$; $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}, \forall a,b\in\mathbb{R}$; $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \forall a,b\in\mathbb{R}, b\ne 0$; $\left(\sqrt[3]{a}\right)^m=\sqrt[3]{a^m}=a^{\frac{m}{3}}, \forall a\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}^*$.

Logaritmi: condiții de existență pentru $\log_a x$: $a>0, a\ne 1, x>0$; definiție: $\log_a x=y\Leftrightarrow x=a^y$; proprietăți: $\log_a a^x=x$; $a^{\log_a x}=x$; $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$; $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$; $\log_a x^m=m\log_a x$; cazuri particulare: $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$; cu aplicarea formulelor în condiții de bună definire.

1.1.3. Şiruri – clasa a IX-a (2h/săpt.)

Notații: fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şir de numere reale* cu termenii a_1 (primul termen, termenul de rang 1), a_2 (al doilea termen, termenul de rang 2), ..., a_n (termenul general) , ...; suma primilor n termeni ai şirului: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... a_n$.

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o *progresie aritmetică* de rație $r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (recurență); $a_n = a_1 + (n-1)r$; $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$; $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

Şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o *progresie geometrică* de rație q nenulă $\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n \cdot q$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (recurență); $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$; $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ pentru $q \neq 1$.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.2.1. Funcții, lecturi grafice - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.2.2. Funcția de gradul I - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.2.3. Funcția de gradul al II-lea - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.2.4. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea – clasa a IX-a (2h/săpt.)

1.2.1. Funcții, lecturi grafice - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Reper cartezian, pereche de coordonate (x, y), x *abscisă*, y *ordonată*, *cadrane* I ($x > 0, y > 0$); II ($x < 0, y > 0$); III ($x < 0, y < 0$); IV($x > 0, y < 0$); axe de coordonate Ox şi Oy, $(x,0)$ punct de pe Ox; $(0, y)$ punct de pe Oy; $(0,0)$ originea reperului cartezian.
Modalități de a descrie o funcție: diagrame, tabele de valori, formule.
Lecturi grafice: determinarea monotoniei / intervalelor de monotonie, *intersecțiile reprezentării grafice a unei funcții numerice* $f : A \to B$ *cu axele de coordonate*: cu axa Ox - rezolvarea ecuației $f(x) = 0$, $x \in A$; cu axa Oy - punct de coordonate $(0, f(0))$, $0 \in A$; condiția ca un punct de coordonate (a,b) să aparțină reprezentării grafice a funcției $f : A \to B$ este $f(a) = b$, $a \in A$; rezolvarea grafică a ecuației $f(x) = g(x)$; *funcție pară:* $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$, unde A este o mulțime simetrică față de origine, *funcție impară:* $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$, unde A este o mulțime simetrică față de origine; *semnul funcției* (poziția reprezentării grafice față de axa Ox).

1.2.2. Funcția de gradul I - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Definiție: $f : A \to B$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$; dreapta de ecuație $y = ax + b$; *reprezentarea grafică a funcției*:

a) prin determinarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate (intersecția cu axa absciselor: rezolvare ecuației $f(x) = 0$, intersecția cu axa ordonatelor: $f(0) = b$);
b) prin determinarea a două puncte distincte aparținând graficului: alegerea a două valori particulare ale abscisei, $x = a \Rightarrow A(a, f(a))$ şi $x = b \Rightarrow B(b, f(b))$.

Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției:
Monotonia funcției de gradul I: discuție după semnul lui a, studiul tabelului de variație.
Semnul funcției de gradul I: tabelul de variație, rezolvarea ecuației $f(x) = 0$, dependența semnului funcției de semnul lui a.

Inecuații de forma $ax+b<0$ ($\le, >, \ge$), $a,b\in\mathbb{R}$; determinarea soluțiilor unei inecuații prin rezolvarea ecuației $f(x)=0$ şi folosirea semnului funcției.

Determinarea *poziției relative a două drepte*; rezolvarea sistemelor de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, unde $a,b,c,m,n,p\in\mathbb{R}$; metoda reducerii, metoda substituției.

1.2.3. Funcția de gradul al II-lea - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Definiție: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$; determinarea *valorii funcției într-un punct* x_0, prin calcularea lui $f(x_0)$; rezolvarea ecuației de gradul al doilea asociate: $ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, *discriminantul* ecuației $\Delta=b^2-4ac$, *numărul şi natura soluțiilor* în funcție de semnul lui Δ:

- $\Delta>0 \Rightarrow$ soluții reale şi diferite, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $\Delta=0 \Rightarrow$ soluții reale şi egale, $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$;
- $\Delta<0 \Rightarrow$ nu există soluții reale.

Reprezentarea grafică prin puncte a funcției: *parabola*, prin determinarea elementelor caracteristice: intersecții cu axele de coordonate; coordonatele vârfului parabolei $V\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$; axa de simetrie $x=-\dfrac{b}{2a}$; orientarea parabolei în funcție de semnul coeficientului dominant a.

Relațiile lui Viète (relații dintre soluțiile x_1,x_2 şi coeficienții a,b,c): suma $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{2a}$, produsul $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$; utilizarea relațiilor lui Viète pentru determinarea unei ecuații când se cunosc soluțiile: $x^2-Sx+P=0$; utilizarea relațiilor lui Viète pentru determinarea altor relații între soluțiile unei ecuații de gradul al doilea.

Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$, unde $S,P\in\mathbb{R}$; metoda substituției sau utilizarea ecuației $t^2-St+P=0$.

1.2.4. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Monotonie, intervale de monotonie $I_1=\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right],\ I_2=\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$; discutarea monotoniei în funcție de semnul coeficientului dominant a; *punct de extrem* al reprezentării grafice a funcției (vârful parabolei), determinarea tipului de extrem (*minim/maxim*) în funcție de semnul coeficientului dominant a, determinarea punctului de extrem al funcției: calcularea abscisei $x_V=-\dfrac{b}{2a}$, determinarea extremului funcției prin calcularea expresiei $y_V=f\left(x_V\right)=-\dfrac{\Delta}{4a}$; interpretare geometrică.

Semnul funcției: tabelul de variație; utilizarea semnului funcției de gradul al doilea în rezolvarea *inecuațiilor* de forma $ax^2+bx+c\le 0$ ($\ge, <, >$), unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, interpretare geometrică.

Rezolvarea *sistemelor* de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, unde $m,n,a,b,c\in\mathbb{R}$; metoda substituției sau metoda grafică (utilizarea metodei grafice pentru determinarea numărului de puncte de intersecție dintre o dreaptă şi o parabolă).

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.3. Funcții şi ecuații – clasa a X-a (3h/săpt.)

Funcții elementare:

- *funcția putere*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$,
- *funcția radical de ordinul doi*: $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$,
- *funcția radical de ordinal trei*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$,
- *funcția exponențială*: $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty), f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$,
- *funcția logaritmică*: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;

identificarea domeniului de definiție, a codomeniului, calcularea valorilor acestor funcții în puncte particulare, utilizarea proprietăților de monotonie şi de semn, a intersecțiilor cu axele de coordonate în rezolvarea de probleme.
Studiul proprietăților unei funcții numerice $f:A\to B$:
→ *injectivitate*: f injectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi $x,y\in A$, $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$; interpretare grafică
→ *surjectivitate*: f surjectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi $y\in B$, există $x\in A$ astfel încât $y=f(x)$; interpretare grafică
→ *bijectivitate*: f bijectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi $y\in B$, există un unic $x\in A$ astfel încât $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ f injectivă **şi** surjectivă; interpretare grafică.
Identificarea de contraexemple pentru argumentarea faptului că o funcție nu este injectivă / surjectivă / bijectivă.
→ *inversabilitate*: f inversabilă $\Leftrightarrow$ există o funcție $g:B\to A$ cu proprietățile $f(g(x))=x$, $\forall x\in B$ şi $g(f(x))=x$, $\forall x\in A$; condiția necesară şi suficientă ca o funcție să fie inversabilă: f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijectivă.
Identificarea şi utilizarea acestor proprietăți cu referire la funcțiile elementare enumerate anterior; interpretarea geometrică a inversabilității unei funcții (reprezentările grafice ale unei funcții şi ale inversei sale sunt simetrice față de prima bisectoare, dreapta de ecuație $y=x$).
Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor, în particular a proprietății de injectivitate.
Ecuații iraționale care conțin radicali de ordinul 2 sau 3:

- identificarea condițiilor de existență şi verificarea / explicitarea lor
- eliminarea radicalilor prin ridicarea la putere (ridicarea la pătrat presupunând verificarea faptului că membrii ecuației au acelaşi semn);
- utilizare proprietăților calculului cu radicali.

Ecuații exponențiale elementare:

- pentru $a>0, a\neq 1$, avem $a^{f(x)}=a^{f(y)} \Leftrightarrow f(x)=f(y)$
- pentru $a>0, a\neq 1, b>0$, avem $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b$.

Ecuații logaritmice elementare:

- pentru $a>0, a\neq 1, a, b\in\mathbb{R}$ şi $f(x)>0$, avem $\log_a f(x)=b \Rightarrow f(x)=a^b$
- pentru $a>0, a\neq 1$, $f(x)>0$ şi $g(x)>0$, avem $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$.

Utilizarea unor substituții care conduc la rezolvarea de ecuații algebrice (de exemplu, pentru rezolvarea unei ecuații de tipul $4^x-3\cdot 2^x+2=0$ se utilizează substituția $t=2^x>0$, care conduce la ecuația algebrică $t^2-3t+2=0$).
Rezolvarea unor probleme care pot fi modelate cu ajutorul ecuațiilor.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.4.1. Metode de numărare – clasa a X-a (3h/săpt.)
1.4.2. Matematici financiare – clasa a X-a (3h/săpt.)

1.4.1. Metode de numărare – clasa a X-a (3h/săpt.)

Mulțimi finite ordonate (mulțimi în care contează ordinea scrierii elementelor).

Definiția *factorialului unui număr natural* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $0! = 1$; proprietate $n! = n \cdot (n-1)!$

Permutări – numărul de mulțimi ordonate cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, care se obțin prin ordonarea unei mulțimi finite cu n elemente; numărul permutărilor de n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, este $P_n = n!$; cazuri particulare $P_1 = 1! = 1,\ P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2,\ P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Aranjamente – numărul submulțimilor ordonate cu câte k elemente care se pot forma cu elementele unei mulțimi finite cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n$; numărul tuturor aranjamentelor de n elemente luate câte k este $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; cazuri particulare $A_n^n = n! = P_n$, $A_n^0 = 1$.

Combinări – numărul submulțimilor cu câte k elemente care se pot forma cu elementele unei mulțimi finite cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n$; numărul tuturor combinărilor de n elemente luate câte k este $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; cazuri particulare $C_n^0 = C_n^n = 1;\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\ n \ge 1;\ C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2},\ n \ge 2$.

Proprietăți: *formula combinărilor complementare*: $C_n^k = C_n^{n-k}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n$; numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este dat de formula $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Elemente de combinatorică:

→ *formula de descompunere a combinărilor*: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n-1$;

→ *binomul lui Newton*: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n$; numărul de termeni ai dezvoltării binomului este $n+1$; *termenul general* (*de rang k+1*): $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $0 \le k \le n$; în raport cu dezvoltarea binomului lui Newton, C_n^k se numeşte *coeficient binomial*; determinarea unui termen/unor termeni cu anumite proprietăți; *sume combinatoriale* obținute prin particularizări ale binomului lui Newton: de exemplu, pentru $a = b = 1$ se obține $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ iar pentru $a = 1, b = -1$ se obține $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Probabilitatea unui eveniment $P = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

1.4.2. Matematici financiare – clasa a X-a (3h/săpt.)

Elemente de *calcul financiar*:

→ determinarea unei necunoscute din relația $\dfrac{p}{100} \cdot a = b$;

→ asocierea formalismului matematic pentru o problemă ce implică *procente*: b reprezintă $p\%$ din $a \Leftrightarrow \dfrac{p}{100} \cdot a = b$ şi rezolvarea cerințelor de tipul: determinarea unui procent dintr-un număr; determinarea unui număr când se cunoaşte un procent din el; determinarea procentului pe care îl reprezintă un număr dat dintr-un alt număr dat.

Dobânda simplă: dobânda calculată pentru o sumă depusă, pe toată perioada depunerii, dată de formula: $D = S_i \cdot t \cdot \frac{p}{100}$, unde S_i reprezintă suma inițială depusă, pe o perioadă de t ani, cu un procent anual de dobândă egal cu p; în acest caz suma la finalul perioadei, S_f, este dată de formula $S_f = S_i + D$.

Dobânda compusă: dobânda calculată pentru o sumă depusă, pe toată perioada depunerii, dată de formula: $D = S_i \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, unde S_i reprezintă suma inițială depusă, pe o perioadă de t ani (sau de perioade – lună, 3 luni, semestrial), cu un pocent de dobândă al perioadei egal cu p; în acest caz suma la finalul perioadei, S_f, este dată de formula $S_f = S_i + D$.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.5.1. Vectori în plan clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.5.2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.5.3. Geometrie – clasa a X-a (3h/săpt.)

1.5.1. Vectori în plan - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Segment orientat, vectori, caracterizare: *direcție, sens, modul*.
Notații: $\overrightarrow{AB}$ vector cu originea A şi extremitatea B; direcția vectorului este dată de dreapta AB, sensul este determinat de parcurgerea dreptei dinspre A spre B, modulul vectorului este egal cu lungimea segmentului (AB); $\vec{v}$ vector liber (reprezentant al unei clase de vectori); modulul vectorului $\vec{v}$ se notează prin $|\vec{v}|$

Vectorul nul: $\vec{0}$ sau $\overrightarrow{AA}$.
Vectori egali: vectori care au aceeaşi direcție, acelaşi sens şi acelaşi modul; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$.
Vectori coliniari: vectori care au aceeaşi direcție.
Operații cu vectori:
1) *adunarea*: notație $\vec{u} + \vec{v}$, rezultatul este un vector ce poate fi determinat prin aplicarea regulii triunghiului sau a regulii paralelogramului; proprietăți: comutativitate, asociativitate, element neutru (vectorul nul $\vec{0}$), *vectori opuşi* (opusul vectorului $\vec{v}$ este vectorul $-\vec{v}$, care are aceeaşi direcție, sens opus şi acelaşi modul)
→ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, regula lui Chasles
→ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
→ opusul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este vectorul $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
→ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
→ oricare ar fi punctul M avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.
2) *înmulțirea cu scalari*: notație $\alpha \cdot \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; rezultatul înmulțirii unui vector cu un scalar este tot un vector; astfel dacă $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{w}$ şi $\alpha \neq 0$, atunci avem următoarele proprietăți: $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ au aceeaşi direcție, au acelaşi sens dacă $\alpha > 0$, au sensuri opuse dacă $\alpha < 0$ şi relația dintre modulele celor doi vectori este $|\vec{w}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$; dacă $\alpha = 1$, cei doi vectori sunt egali; dacă $\alpha = -1$, cei doi vectori sunt vectori opuşi.

1.5.2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Condiții de *coliniaritate*:
→ dacă există $\alpha \neq 0$ astfel încât $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{w}$, atunci $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt vectori coliniari
→ $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A, B, C$ coliniare

→ $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ segmentele (AB) şi (CD) sunt situate pe drepte paralele sau A, B, C, D coliniare

→ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ paralelogram (eventual degenerat)

Descompunerea după două direcții date de doi vectori necoliniari şi nenuli: fie $\vec{u}, \vec{v}$ vectori nenuli, atunci oricare ar fi vectorul $\vec{w}$ există scalarii $a, b \in \mathbb{R}$ (unici) astfel încât $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.

Proprietăți:

→ în triunghiul ABC, dacă M este mijlocul segmentului (BC), atunci $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

→ în triunghiul ABC, dacă G este centrul de greutate al triunghiului, atunci oricare ar fi punctul M avem $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3}$; caz particular $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

→ dacă $M \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = k \in \mathbb{R}_+^*$, atunci oricare ar fi punctul T, atunci $\overrightarrow{TM} = \dfrac{\overrightarrow{TA} + k \cdot \overrightarrow{TB}}{1+k}$.

1.5.3. Geometrie – clasa a X-a (3h/săpt.)

Reper cartezian în plan: xOy, coordonate carteziene în plan: (x, y);

Distanța dintre două puncte în plan: pentru $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, avem $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$; *coordonatele mijlocului* $M(x_M, y_M)$ al *segmentului* (AB): $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$; *coordonatele centrului de greutate* $G(x_G, y_G)$ al triunghiului ABC: $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_c}{3}; y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Versorii axelor de coordonate: $\vec{i}$ versorul axei Ox, $\vec{j}$ versorul axei Oy.

Coordonatele unui vector $\vec{v}$ în plan: dacă $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, atunci (a, b) reprezintă perechea (unică) de coordonate asociată vectorului $\vec{v}$.

Coordonatele sumei vectoriale: $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ şi $\vec{u} = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j}$, atunci $\vec{v} + \vec{u} = (a+c) \cdot \vec{i} + (b+d) \cdot \vec{j}$.

Coordonatele produsului dintre un vector şi un număr real: dacă $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha a) \cdot \vec{i} + (\alpha b) \cdot \vec{j}$.

Ecuația dreptei în plan determinată de un punct $A(x_A, y_A)$ şi de o direcție dată (panta m) $d: y - y_A = m(x - x_A)$.

Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$, sau prin exprimarea (clasa a XI-a) cu ajutorul determinanților: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$; *panta dreptei* AB: $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (pentru cazul $x_A \neq x_B$).

Ecuația generală carteziană implicită: $d: ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Ecuația generală carteziană explicită: $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.

Calcul de distanțe: distanța de la un punct $A(x_A, y_A)$ la dreapta d de ecuație $ax + by + c = 0$ $\text{dist}(A, d) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Calcul de arii (clasa a XI-a): dacă $A_1A_2A_3$ este un triunghi cu vârfurile de coordonate $A_i(x_i, y_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, atunci $\mathrm{A}_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Condiție de coliniaritate a trei puncte (clasa a XI-a): dacă $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, atunci punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

Condiții de paralelism:

→ *pentru două drepte oblice* $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ date prin *ecuații generale implicite*, avem:

- $d_1 = d_2$ dacă şi numai dacă coeficienții sunt proporționali, adică $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
- $d_1 \parallel d_2$ dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

→ *pentru două drepte oblice* $d_1 : y = m_1x + n_1$, $d_2 : y = m_2x + n_2$ date prin *ecuații generale explicite*, avem:

- $d_1 = d_2$ dacă şi numai dacă avem îndeplinită condițiile $m_1 = m_2$ (aceeaşi pantă) şi $n_1 = n_2$ (aceeaşi ordonată la origine)
- $d_1 \parallel d_2$ dacă şi numai dacă $m_1 = m_2$ (aceeaşi pantă).

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.6. Aplicații ale trigonometriei în geometrie – clasa a IX-a (2h/săpt.)

Triunghiul dreptunghic, caracterizare: unghi drept, unghiuri ascuțite complementare, ipotenuză, catete
- *teorema lui Pitagora*: suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei; cu notațiile: a lungimea ipotenuzei, b, c - lungimile catetelor, avem relația $a^2 = b^2 + c^2$
- *înălțimea* corespunzătoare ipotenuzei, h, se poate determina din formula $h = \frac{b \cdot c}{a}$ sau din teorema înălțimii
- *aria* este dată de formula $S = \frac{b \cdot c}{2}$
- *lungimea medianei* corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
- dacă triunghiul dreptunghic are un unghi cu măsura de 30°, atunci *lungimea catetei care se opune unghiului de 30°* este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
- *sinusul* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse şi lungimea ipotenuzei
- *cosinusul* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate şi lungimea ipotenuzei
- *tangenta* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse şi lungimea catetei alăturate
- *cotangenta* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate şi lungimea catetei opuse.

Formule trigonometrice: $\sin(180^0 - x) = \sin x$; $\cos(180^0 - x) = -\cos x$.

Rezolvarea triunghiului, modalități de calcul a lungimii unui segment şi a măsurii unui unghi:

→ cunoscându-se lungimile laturilor unui triunghi, se recomandă verificarea cazurilor particulare (triunghi isoscel sau dreptunghic), caz în care se pot utiliza proprietățile specifice unui astfel de triunghi pentru rezolvarea problemei.

→ cunoscându-se lungimile laturilor triunghiului (a, b, c), putem determina:

- aria triunghiului- formula lui Heron: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului
- înălțimile, prin egalarea valorii obținute prin aplicarea formulei lui Heron cu expresia ariei folosind formulele $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$;
- $\sin A, \sin B$ şi $\sin C$, din egalarea ariei cu expresia $S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{bc\sin A}{2}$;
- raza cercului circumscris triunghiului, R, din egalarea ariei cu expresia $S=\frac{abc}{4R}$;
- raza cercului înscris în triunghi, r, din egalarea ariei cu expresia $S=p\cdot r$;
- $\cos A, \cos B$ şi $\cos C$, din aplicarea teoremei cosinusului: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ şi $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;

→ teorema sinusurilor: în orice triunghi ABC având laturile de lungimi a,b,c are loc relația $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

EXEMPLE DE ITEMI TIP EXAMEN DE BACALAUREAT PENTRU RECAPITULAREA NOȚIUNILOR DIN TEMA 1

EXEMPLUL 1

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Ordonați crescător numerele $\sqrt{12}, 2\sqrt{2}$ şi 3.
5p	**2.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.
5p	**3.** Se consideră funcțiile $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(x+1)$ şi $g:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$, $g(x)=2^x-1$. Calculați $f(g(1))$.
5p	**4.** Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), A(5,1), B(3,5)$. Calculați lungimea medianei din vârful O în triunghiul OAB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul MNP cu $MP=6, \sin N=\frac{3}{5}$ şi $\sin P=\frac{4}{5}$. Calculați lungimea laturii (MN).

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{12}>3$ $2\sqrt{2}<3$ $2\sqrt{2}<3<\sqrt{12}$	**2p** **2p** **1p**
2.	x şi y sunt soluțiile ecuației $t^2-5t+6=0$ $t_1=2, t_2=3$ $S=\{(2,3),(3,2)\}$	**2p** **2p** **1p**
3.	$g(1)=1$ $f(g(1))=f(1)=1$	**2p** **3p**
4.	$C_n^2=10$ $n=5$	**2p** **3p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $(AB)\Rightarrow M(4,3)$ $OM=5$	**2p** **3p**
6.	$\frac{MN}{\sin P}=\frac{MP}{\sin N}$ $MN=8$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 2

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.
5p	**2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3}<0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.
5p	**4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați p, ştiind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A(2,3)$. Determinaţi coordonatele punctului B, ştiind că A este mijlocul segmentului (OB).
5p	**6.** Determinaţi $x \in (0, 90^\circ)$ ştiind că $\dfrac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2^{-1} + 2^{-2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} =$ $= \dfrac{1}{4} = 0,75$	**3p** **2p**
2.	$\dfrac{2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0$ $x \in (-\infty, 3)$	**3p** **2p**
3.	Condiţie: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ $x + 2 = x^2 + 4x + 4$ $x_1 = -2$ şi $x_2 = -1$	**1p** **2p** **2p**
4.	Dobânda obţinută este $D = 1008 \text{ lei} - 900 \text{ lei} = 108 \text{ lei}$ $\dfrac{p}{100} \cdot 900 = 108$ $p = 12$	**1p** **2p** **2p**
5.	A este mijlocul segmentului $(OB) \Rightarrow x_B = 2x_A - x_O = 4$ $y_B = 2y_A - y_O = 6$	**3p** **2p**
6.	$\sin x + 4\cos x = 5\cos x$ $\sin x = \cos x$ $x = 45^\circ$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 3

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ se cunosc $a_4 = 7$ şi $a_9 = 22$. Calculaţi a_{14}.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5 - x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3-x} = \dfrac{1}{4}$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $M = \{0,1,2,3\}$.
5p	**5.** Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(3,0)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.
5p	**6.** Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că $AB = 6$, $AC = 5$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_9 = a_4 + 5r \Rightarrow r = 3$	**2p**

	$a_{14} = a_9 + 5r = 37$	**3p**
2.	A este punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g; $f(x) = g(x) \Rightarrow x - 3 = 5 - x$ $x - 3 = 5 - x \Rightarrow x_A = 4$ $y_A = 1$	**1p** **2p** **2p**
3.	$2^{3-x} = 2^{-2}$ $3 - x = -2 \Rightarrow x = 5$	**2p** **3p**
4.	A_4^3 este numărul de posibilități de alegere a numerelor de 3 cifre distincte din M A_3^2 este numărul de posibilități de alegere a numerelor de 2 cifre distincte nenule din M $A_4^3 - A_3^2 = 18$ numere	**2p** **2p** **1p**
5.	Fie C simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului (AC) $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$ $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -2$	**1p** **2p** **2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ $BC = \sqrt{31}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 4

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$.

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0), B(2,2), C(-1,2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \ge n^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$.

Barem de evaluare și de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1 \Rightarrow -3 \le x + 1 \le 3$ $-4 \le x \le 2 \Rightarrow x \in [-4,2]$ $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$	**2p** **2p** **1p**
2.	$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ a - b + c = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} c = 0 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - x$	**3p** **2p**

3.	Condiții $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,+\infty)$ $\log_2 \frac{x+3}{x} = 2$ $x = 1 \in (0,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p = \frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$ Cazuri posibile sunt 4 Cazuri favorabile sunt 3 $p = \frac{3}{4}$	**1p** **1p** **2p** **1p**
5.	$2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + \vec{i} - \vec{j} = 5\vec{i} - \vec{j}$ $C(5,-1)$	**3p** **2p**
6.	Din teorema sinusului $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C}$ $R = \frac{6}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 5

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right) + \log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx^2 + 2x - 5$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției *f* este egală cu 2.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$.

5p **4.** Calculați $C_6^2 - A_4^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ și $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculați $\cos 130^\circ + \cos 50^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(3+\sqrt{5}\right) + \log_2\left(3-\sqrt{5}\right) = \log_2(9-5) =$ $= \log_2 4 = 2$	**3p** **2p**
2.	$-\frac{b}{2a} = 2$ $-\frac{2}{2m} = 2$ $m = -\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**

3.	$3^{1-x^2}=3^{-3}\Rightarrow 1-x^2=-3$ $x^2=4\Rightarrow x\in\{2,-2\}$	**3p** **2p**
4.	$C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ $A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=12$ $C_6^2-A_4^2=3$	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă C este mijlocul lui $(AB)\Rightarrow C(4,3)$ $OC=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$ $OC=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ=0$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 6

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3,\ AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$ $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}=0$	**2p** **2p** **1p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=2$ $V(1,2)$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^{x^2-1}=1$ $x^2-1=0$ $x\in\{-1,1\}$	**1p** **2p** **2p**
4.	$A_4^3=$ $=24$	**2p** **3p**

5.	$\vec{w}=2\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)-\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)=$ $=3\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\vec{w}\left(3,-5\right)$	**2p** **3p**
6.	$BC=5$ $h=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 7

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră o progresie aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq1}$ în care $a_3=5$ şi $a_5=11$. Calculați suma primilor şapte termeni ai progresiei.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x-1$, $g\left(x\right)=x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor *f* şi *g*.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.
5p	**4.** Calculați $a\cdot b$ ştiind că $a+b=150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.
5p	**5.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A\left(2,3\right)$, $B\left(4,5\right)$ şi $C\left(m+1,m^2\right)$ sunt coliniare.
5p	**6.** Calculați $\cos x$, ştiind că $\sin x=\dfrac{1}{3}$ şi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases}a_1+2r=5\\a_1+4r=11\end{cases}\Rightarrow a_1=-1,\ r=3$ $a_7=a_1+6r=17$, $S_7=56$	**3p** **2p**
2.	$f\left(x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow 2x-1=x+3$ $x=4$ şi $y=7$ $A\left(4,7\right)$	**2p** **2p** **1p**
3.	Prin ridicare la puterea a 3-a se obține $x^2-1=8$ $x=\pm3$	**1p** **2p** **2p**
4.	$a+b=150\Rightarrow\dfrac{b}{4}+b=150\Rightarrow b=120$ $a=30$ $a\cdot b=3600$	**3p** **1p** **1p**
5.	$AB:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{2}\Rightarrow x-y+1=0$ $C\in AB\Rightarrow m^2-m-2=0$ $m=-1$ sau $m=2$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\cos x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 8

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 6$ şi $a_3 = 5$. Calculaţi a_6.
5p	**2.** Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $2x^2 - x - 3 \leq 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+2) - \log_3(x-4) = 1$.
5p	**4.** După o scumpire cu 5%, preţul unui produs creşte cu 12 lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.
5p	**6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $BC = 9$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 120^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ r = -1 \end{cases}$ $a_6 = a_1 + 5r$ $a_6 = 2$	**2p** **2p** **1p**
2.	$2x^2 - x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$ $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$	**3p** **2p**
3.	Condiţii de existenţă $\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (4, +\infty)$ $\log_3\left(\frac{x+2}{x-4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 3$ $x = 7 \in (4, +\infty)$	**1p** **2p** **2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $5\% \cdot x = 12$ lei $x = 240$ lei	**3p** **2p**
5.	Se notează cu M mijlocul lui $[AB]$ şi cu d mediatoarea segmentului $[AB]$; atunci $M(3,2)$ $m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = 1$ $d: y - 2 = 1 \cdot (x-3) \Rightarrow d: y = x - 1$	**1p** **2p** **2p**
6.	Din teorema sinusului $\Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A}$ $\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $R = 3\sqrt{3}$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 9

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculaţi $\log_6 3 + \log_6 12$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x + 7^{x+1} = 392$.
5p	**4.** Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care $C_n^2 = 4A_n^1$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ și $B(4,m)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB = 5$.
5p	**6.** Calculați $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$.

Barem de evaluare și de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 36$ $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$	**3p** **2p**
2.	$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$ $\Delta = -23$ $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{23}{8}$	**2p** **1p** **2p**
3.	$7^x + 7^{x+1} = 392 \Leftrightarrow 7^x + 7^x \cdot 7 = 392$ $7^x \cdot 8 = 392 \Leftrightarrow 7^x = 49$ $x = 2$	**1p** **2p** **2p**
4.	$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 4\frac{n!}{(n-1)!}$ $\frac{n-1}{2} = 4$ $n = 9$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\sqrt{(4-0)^2 + (m+2)^2} = 5$ $m^2 + 4m - 5 = 0$ $m = -5, m = 1$	**1p** **2p** **2p**
6.	$\cos 140^\circ = \cos\left(180^\circ - 40^\circ\right) = -\cos 40^\circ$ $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 10

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(10)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = x - 3$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.
5p	**5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x - y - 6 = 0$ și $d_2: -x + 2y - 6 = 0$.
5p	**6.** Calculați cosinusul unghiului M al triunghiului MNP știind că $MN = 4$, $MP = 5$ și $NP = 6$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2(x+1)=x-1+3x-1$ $2x=4\Rightarrow x=2$	**2p** **3p**
2.	$f(5)=0$ $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**3p** **2p**
3.	Condiţii $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[3,+\infty)$ $x-1=(x-3)^2\Rightarrow x^2-7x+10=0$ $x=2$ sau $x=5$ $2\notin[3,+\infty)\Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	Numărul de submulţimi ordonate este A_7^2 $A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$	**2p** **3p**
5.	$\begin{cases}2x-y-6=0\\ -x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow x=y=6$ $d=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}$ $d=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos M=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2\cdot MN\cdot MP}$ $\cos M=\frac{1}{8}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 11

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care graficul funcţiei f conţine punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de 2 cifre, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ şi $N(-1,3)$. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

5p **6.** Determinaţi lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=$ $=\log_7 7=1$	**3p** **2p**

2.	$A(2,3)\in G_f \Rightarrow f(2)=3 \Rightarrow 4+2a+b=3$ $B(-1,0)\in G_f \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow 1-a+b=0$ $a=0, b=-1$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^x+3\cdot 3^x=36$ $3^x=9$ $x=2$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ Numerele divizibile cu 4: 12, 16,…,96 $\Rightarrow$ 22 cazuri favorabile Numerele de 2 cifre: $\overline{ab}, a\in\{1,2,...,9\}, b\in\{0,1,2,...,9\}\Rightarrow 90$ cazuri posibile $p=\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$ Coordonatele sunt $(1,2)$	**3p** **2p**
6.	$\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$ $l=4$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 12

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=5$ şi $r=2$. Calculaţi suma primilor 5 termeni ai progresiei.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m pentru care ecuaţia $x^2-(m+1)x+m=0$ are soluţii reale egale.
5p	**3.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox şi respectiv Oy.
5p	**4.** Calculaţi $2C_4^2-3A_4^1$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=(a+3)\vec{i}+2\vec{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi numărul $a>0$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Aria triunghiului *MNP* este egală cu 16, iar $MN=NP=8$. Calculaţi $\sin N$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_5=\dfrac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}$ $S_5=45$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=0$ $m^2+2m+1-4m=0$ $m=1$	**1p** **2p** **2p**

3.	$G_f \cap Ox: f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ $A(-1,0)$ $G_f \cap Oy: f(0)=1$ $B(0,1)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
4.	$C_4^2=6$ $A_4^1=4$ $2C_4^2-3A_4^1=0$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\frac{2}{a+3}=\frac{a}{2}$ $a^2+3a-4=0 \Rightarrow a=1$ sau $a=-4$ $a>0 \Rightarrow a=1$	**2p** **2p** **1p**
6.	Aria $\Delta MNP=\frac{MN\cdot NP\cdot \sin N}{2}$ $\sin N=\frac{2\cdot 16}{8\cdot 8}$ $\sin N=\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**

LECȚII DE SINTEZĂ

în vederea pregătirii sesiunii iulie-august a examenului de

BACALAUREAT 2012 - M2

pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică,
profil: servicii, resurse naturale şi protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

MATEMATICĂ

TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

Argument:

Prezentul breviar teoretic are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim / mediu de competență şi nu reprezintă o listă exhaustivă.
De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență în funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
2.1. Algebră clasa **a XI-a**
- **2.1.1. Matrice** - clasa a XI-a (3h/săpt.)
- **2.1.2. Determinanți -** clasa a XI-a (3h/săpt.)
- **2.1.3. Sisteme de ecuații liniare** - clasa a XI-a (3h/săpt.)

2.1.1. Matrice - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Matrice, mulțimi de matrice: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ m,n=\overline{1,3}$; $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \mid a_{ij}\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,2}\right\}$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale; $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \mid a_{ij}\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right\}$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3, cu elemente numere reale.

Elementele unei matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A=(a_{ij})_{i=\overline{1,m},\,j=\overline{1,n}}$, a_{ij} este elementul de pe linia i şi de pe coloana j.

Identificarea unui element dintr-o matrice când se cunoaşte poziția acestuia (perechea de indici).

Exemplificarea de matrice; obținerea unor matrice particulare dintr-o mulțime de matrice ce verifică condiții date, de exemplu, pentru $\mathcal{M}=\left\{A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a\end{pmatrix} \mid A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ a^2-2b^2=1\right\}$ se pot identifica $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Transpusa unei matrice (liniile devin coloane şi coloanele devin linii); de exemplu, matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$ are transpusa ${}^tA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

Matricea nulă este matricea cu toate elementele egale cu 0.

Matricea unitate (pentru matrice pătratice): $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Alte tipuri de matrice: *matrice linie, matrice coloană*.

Operații cu matrice din mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ m,\ n=\overline{1,3}$

- *adunarea*: dacă $A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, atunci $A+B=C$, unde $C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m}$ şi $j=\overline{1,n}$ (se adună elementele de pe poziții identice din cele două matrice, termeni ai adunării); proprietăți ale adunării de matrice : asociativitate, comutativitate, element neutru (matricea nulă, opusa unei matrice)
- *înmulțirea unei matrice cu un scalar*: dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \alpha\in\mathbb{R}$, $A=(a_{ij})$, atunci $\alpha\cdot A=C$, unde $C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ C=(c_{ij})$ şi $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ (se înmulțeşte fiecare element al matricei cu scalarul α); se poate utiliza şi pentru scoaterea unui factor comun (forțat); proprietăți: $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$; $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- *înmulțirea matricelor* în cazurile bine definite: dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, atunci $A\cdot B=C$, unde $C\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}),\ C=(c_{ij})$ şi $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,p}$

Observații.

Înmulțirea matricelor pătratice de acelaşi ordin; proprietăți: asociativitate, element neutru, matricea unitate.

Există perechi de matrice pentru care înmulțirea lor este comutativă.

Efectuarea de calcule matriceale, cu utilizarea de proprietăți; rezolvarea de ecuații matriceale care implică adunarea matricelor şi înmulțirea cu scalari a matricelor.

2.1.2. Determinanți - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3; calculul unui determinant de ordin cel mult 3 cu regula triunghiului şi/sau cu regula lui Sarrus:

- dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, atunci $\det A=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$;

- regula de calcul a determinaților de ordinul 3 (Sarus), de exemplu:

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=(3x+0+y)-(3+4x+0)=0$$

$$\begin{array}{ccc}x & y & 1\\ 0 & 3 & 1\end{array}$$

Proprietăți ale determinanților (selecție):

- dacă într-un determinant două linii (coloane) sunt identice, atunci determinantul este nul;
- dacă într-un determinant elementele unei linii (coloane) sunt nule, atunci determinantul este nul;
- dacă într-un determinant se adună la elementele unei linii (coloane) elementele altei linii (coloane), atunci valoarea determinantului nu se schimbă;
- $\det A=\det({}^tA)$, oricare ar fi A matrice pătratică;
- $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, oricare ar fi A,B matrice pătratice de acelaşi ordin;

Aplicații ale determinanților în geometrie:

- ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte $A(x_1,y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$ este $\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$

- condiția de coliniaritate a trei puncte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ şi $C(x_3,y_3)$ este $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$

- aria S unui triunghi ABC cu vârfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ şi $C(x_3, y_3)$ $S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

2.1.3. Sisteme de ecuații liniare - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Matrice inversabile în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2,3\}$:

- definiția matricei inversabile: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$
- condiția pentru ca o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2,3\}$ să fie inversabilă este $\det A \neq 0$
- *calculul inversei unei matrice* din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2,3\}$: calculul determinantului (şi impunerea condiției ca acesta să fie diferit de 0), scrierea transpusei, calculul complemenților algebrici şi determinarea matricei adjuncte, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$
- caz particular pentru matricele de ordin 2: dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- *determinarea inversei unei matrice inversabile* prin utilizarea de proprietăți algebrice ale calculului matriceal; de exemplu, dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi din ipoteza unei probleme obținem o relație de tipul $A^2 - 3A = I_3$, relația se poate rescrie $A \cdot (A - 3I_3) = (A - 3I_3) \cdot A = I_3$, de unde $A^{-1} = A - 3I_3$
- proprietăți: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, unde A şi B sunt matrice inversabile.

Ecuații matriceale de tip:

a) $AX = B$ cu soluția $X = A^{-1}B$ (în cazul în care A este o matrice pătratică şi inversabilă)
b) $XA = B$ cu soluția $X = BA^{-1}$ (în cazul în care A este o matrice pătratică şi inversabilă)
c) $AXB = C$ cu soluția $X = A^{-1}CB^{-1}$ (în cazul A, B matrice pătratice şi inversabile).

Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; caracterizare:

- din punct de vedere al existenței soluției: *compatibil* (sistemul admite soluție/soluții); *incompatibil* (sistemul nu admite soluții);
- din punct de vedere al *unicității soluției* unui sistem compatibil: sisteme cu soluție unică (compatibil determinate) sau cu soluții care depind de un parametru (simplu nedeterminate), de doi parametri (dublu nedeterminate),...

Metode de rezolvare:

→ *metoda substituției; metoda reducerii (metoda lui Gauss, cu pivotare)*

→ *metoda matriceală*: aducerea sistemului la forma matriceală, $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, unde A este o matrice pătratică şi inversabilă

→ aplicarea *metodei lui Cramer* pentru rezolvarea sistemelor liniare (numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor şi $\det A \neq 0$, unde A este matricea sistemului): calcularea determinanților obținuți din determinantul matricei A prin înlocuirea, pe rând, a câte unei coloane corespunzătoare fiecărei necunoscute cu coloana termenilor liberi; determinarea soluției.

TEMA 2. Algebră - clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa. a XII-a (3h/săpt.)
2.2.1. Grupuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)
2.2.2. Inele şi corpuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)
2.2.3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, unde p prim) - clasa a XII-a (3h/săpt.)

2.2.1. Grupuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Lege de compoziție internă: $*: M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, unde M este o mulțime nevidă.
Tabla unei legi de compoziție internă pe o mulțime M
Clase de resturi mod n, $\hat{k} = \{t \in \mathbb{Z} \mid \text{restul împărțirii lui } t \text{ la } n \text{ este egal cu } k\}$, unde $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$; mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_n = \{\hat{k} \mid k \in \{0,1,2,...,n-1\}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Operația de adunare pe $\mathbb{Z}_n$: $\hat{a} + \hat{b} = \hat{c}$, unde clasa $\hat{c}$ se determină calculând restul împărțirii sumei $(a+b)$ la n; proprietăți: asociativitate, comutativitate, element neutru $\hat{0}$; opusul clasei $\hat{k}$, $k \in \{1,2,...,n-1\}$ este clasa lui $\widehat{n-k}$.
Operația de înmulțire pe $\mathbb{Z}_n$: $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{c}$, unde clasa $\hat{c}$ se determină calculând restul împărțirii produsului $(a \cdot b)$ la n; proprietăți: asociativitate, comutativitate, element neutru $\hat{1}$; există inversul clasei $\hat{k}$, $k \in \{1,2,...,n-1\}$ numai în cazul în care $(k,n) = 1$ (numere prime între ele); exemplu, în $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$, clasele $\hat{1}$ și $\hat{5}$ sunt inversabile şi inversul clasei $\hat{1}$ este clasa $\hat{1}$, iar inversul clasei $\hat{5}$ este clasa $\hat{5}$, iar clasele $\hat{0}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ nu sunt inversabile; dacă $p \in \mathbb{N}^*, p$ prim, atunci toate clasele, cu excepția clasei $\hat{0}$, sunt inversabile.
Parte stabilă în raport cu o lege de compoziție definită pe o mulțime nevidă M: oricare ar fi $x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$
Grup, notație $(G,*)$, G mulțime nevidă şi $*: G \times G \to G$ (lege de compoziție internă); *axiomele grupului*:

- *asociativitate*: $x * (y * z) = (x * y) * z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$
- *existența elementului neutru*: există $e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x$, oricare ar fi $x \in G$; (dacă există, elementul neutru este unic); determinarea elementului neutru revine la rezolvarea unui sistem de ecuații în care necunoscuta este e, soluția obținută fiind element neutru doar dacă **nu** depinde de alegerea lui x
- *orice element este simetrizabil*: oricare ar fi $x \in G$, există $x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$; (dacă există, inversul unui element este unic); determinarea inversului unui element revine la rezolvarea unui sistem de ecuații în care necunoscuta este x'.

Grup comutativ (*abelian*) este un grup în care legea de compoziție internă este şi comutativă.
Este utilă verificarea comutativității înainte de verificarea axiomelor privind elementul neutru / elementele simetrizabile, pentru a uşurasimplifica verificarea acestor axiome.
Exemple de:

- *grupuri numerice*
- *grupuri de matrice*; în verificarea structurii de grup pentru submulțimi ale unei mulțimi de matrice, se poate invoca faptul că asociativitatea este o proprietate valabilă pe toate mulțimile de matrice cu elemente numere sau clase de resturi; există grupuri de matrice, în raport cu operația de înmulțire, care sunt comutative; utilizarea elementelor de algebră matriceală, prin utilizarea proprietăților rezultate din condiția de parte stabilă (de exemplu, dacă se evidențiază o proprietate de tipul $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, aceasta poate fi utilizată în rezolvarea unor cerințe ulterioare, fără a apela mereu la calculul efectiv cu tablourile matriceale)
- $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup comutativ, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$; $(\mathbb{Z}_p \setminus \{\hat{0}\}, \cdot)$ este grup comutativ (unde $p \in \mathbb{N}^*$, p prim).

Acestui capitol i se pot asocia cerințe de tip rezolvarea de ecuații într-un grup sau calcularea unor relații între elemente ale grupului, situații care nu necesită verificarea axiomelor grupului ci doar utilizarea lor pentru efectuarea calculelor.
Morfism şi izomorfism de grupuri:
Se consideră $(G_1,*)$ şi $(G_2,\circ)$ grupuri.
Funcția $f: G_1 \to G_2$ se numeşte *morfism* de grupuri dacă $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G_1$.
Funcția $f: G_1 \to G_2$ se numeşte *izomorfism* de grupuri dacă este morfism şi este bijectivă.
Proprietăți: dacă f este izomorfism, atunci:

- $f(e) = e'$, unde e şi e' sunt elementele neutre ale grupurilor $(G_1,*)$ şi, respectiv, $(G_2,\circ)$

- $f(x')=(f(x))'$, oricare ar fi $x\in G_1$ (imaginea simetricului lui x este egală cu simetricul imaginii lui x)

Pot fi formulate enunțuri în care se cere să demonstrăm că nu există izomorfism între două grupuri date; în acest caz, trebuie identificată o proprietate a izomorfismului, care nu este verificată;

2.2.2. Inele şi corpuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Definiția inelului; verificarea axiomelor inelului; exemple de inele numerice: $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Z}_n$, inele de matrice, inele de funcții reale.
Divizori ai lui „0”, cu aplicații la rezolvarea de ecuații în $\mathbb{Z}_n$.
Definiția corpului; verificare axiomelor corpului. Exemple de corpuri numerice: $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ şi $\mathbb{Z}_p$ cu p prim.

2.2.3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, unde p prim) - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Forma algebrică a unui polinom: $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\quad ...\quad +a_0$, unde $a_n,a_{n-1},...,a_0\in K$, $a_n\neq 0$ unde K poate fi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim; *gradul unui polinom*, *calcularea unor valori* ale polinomului; semnficația unor valori: $f(0)$ este utilizată pentru determinarea termenului liber; $f(1)$ este utilizată pentru determinarea sumei coeficineților polinomului
Operații cu polinoame (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar); proprietăți.
Metoda identificării coeficienților
Teorema împărțirii cu rest: pentru orice două polinoame $f,g\in K[X],\quad g\neq 0$, există polinoamele $q,r\in K[X]$ unice astfel încât $f=g\cdot q+r$ şi grad $r<$ grad g.
Împărțirea polinoamelor: utilizarea algoritimilor specifici; schema lui Horner, utilizată pentru determinarea câtului şi a restului rezultate la efectuarea împărțirii la $X-a$.
Teorema împărțirii la $X-a$: restul împărțirii polinomului $f\in K[X]$ la $X-a$ este $f(a)$.
Divizibilitatea polinoamelor: fie polinoamele $f,g\in K[X],\ g\neq 0$, atunci f se divide prin g dacă există $h\in K[X]$ astfel încât $f=gh$.
Teorema lui Bezout: fie polinomul $f\in K[X], f\neq 0$ şi $a\in K$, atunci a este rădăcină a polinomului f dacă şi numai dacă f se divide prin $X-a$; consecință: în acest caz, există $g\in K[X]$ astfel încât $f=(X-a)\cdot g$
Rădăcini ale polinoamelor: rădăcini simple, rădăcini multiple: a este rădăcină de ordin de multiplicitate p, $p\in\mathbb{N}^*$ a polinomului f dacă $(X-a)^p\mid f$ şi $(X-a)^{p+1}\nmid f$; în cazul rădăcinilor reale multiple pentru un polinom cu coeficienți reali, se poate utiliza funcția polinomială ataşată şi proprietăți de derivabilitate ale funcțiilor reale.
Descompunerea unor polinoame în factori ireductibili: de exemplu, dacă $f\in\mathbb{R}[X]$ admite toate rădăcinile reale şi grad $f=n\geq 1$, atunci f se poate descompune în factori ireductibili $f=a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, unde $x_1,x_2\ ...\ x_n$ sunt rădăcinile reale ale polinomului f; descompunere peste corpul numerelor reale: un polinom cu coeficienți reali admite ca factori ireductibili, peste corpul numerelor reale, cel mult factori de gradul I sau de gradul al doilea, în acest caz, discriminantul asociat factorilor de gradul al doilea fiind negativ.
Numărul de rădăcini reale ale unui polinom nenul cu coeficienți reali este cel mult egal cu gradul polinomului.
Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 3:

i) dacă $f\in K[X], f=aX^2+bX+c,\quad a\in K^*$ şi $x_1,x_2\in K$ sunt rădăcinile lui f, atunci au loc relațiile:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

ii) dacă $f \in K[X],\ f = aX^3 + bX^2 + cX + d,\quad a \in K^*$ şi $x_1, x_2, x_3 \in K$ sunt rădăcinile lui f, atunci au loc relațiile: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$

Rezolvarea *ecuațiilor algebrice* cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$:

- dacă o ecuație algebrică cu coeficienți întregi are rădăcini întregi, atunci ele se găsesc printre divizorii termenului liber;
- dacă o ecuație algebrică cu coeficienți întregi, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots\ + a_0 = 0$, are rădăcini raționale, atunci acestea sunt de forma $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1$, unde p este divizor al termenului a_0 şi q este un divizor al termenului a_n;
- dacă o ecuație cu coeficienți raționali are soluția $x_1 = a + b\sqrt{c},\ a, b, c \in \mathbb{Q},\ \sqrt{c} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, atunci are şi soluția $x_2 = a - b\sqrt{c}$, cu acelaşi ordin de multiplicitate ca soluția $x_1 = a + b\sqrt{c}$;

Ecuații bipătrate: $ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a \neq 0$, se utilizează substituția $x^2 = t$ şi se rezolvă ecuația $at^2 + bt + c = 0$.

Ecuații binome: $x^n = a$, unde $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$; cazuri particulare: $x^2 = a$ are soluții reale numai în cazul $a \geq 0$, soluții egale cu $\pm\sqrt{a}$; $x^3 = a,\ a \in \mathbb{R}$ are unica soluție reală $\sqrt[3]{a}$; $x^4 = 1$ are soluțiile reale ± 1.

Ecuațiile reciproce se clasifică în:

- ecuații reciproce de grad impar, care admit întotdeauna rădăcina -1; se împarte expresia algebrică asociată prin $X + 1$ şi se continuă cu rezolvarea unei ecuații algebrice reciproce de grad par;
- ecuații reciproce de grad par, care se rezolvă utilizând substituția $t = x + \dfrac{1}{x}$, folosind relația $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$; de exemplu, ecuația de gradul al patrulea se împarte la x^2 pentru a evidenția substituția.

EXEMPLE DE ITEMI TIP EXAMEN DE BACALAUREAT PENTRU RECAPITULAREA NOȚIUNILOR DIN TEMA 2

EXEMPLUL 13

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de zero.
5p **c)** Pentru $m=1$ arătați că $y_1^2=x_1\cdot z_1$, unde (x_1,y_1,z_1) este soluția sistemului.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.
5p **a)** Pentru $m=0$, calculați restul împărțirii polinomului f la $X-1$.
5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.
5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei este egală cu $m+(-m)+2$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	$\det A=-2m^2-2m+12$ $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$	**2p** **3p**
c)	Pentru $m=1\Rightarrow x=4$, $y=2$, $z=1$ Finalizare	**4p** **1p**
2.a)	Pentru $m=0\Rightarrow f=X^3+1$ Restul este egal cu $f(1)=2$	**2p** **3p**
b)	$f(-1)=-1+m-m+1=0$ $X+1\mid f$	**3p** **2p**
c)	$f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$ f are trei rădăcini reale $\Leftrightarrow X^2+(m-1)X+1$ are două rădăcini reale $\Leftrightarrow m^2-2m-3\geq 0$ $m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 14

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$, cu $x\in(0.+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p **b)** Determinați numărul real a astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.
5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p | **a)** Arătați că polinomul f se divide prin $X-1$.
5p | **b)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.
5p | **c)** Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(H(x))=1+0-0$ Finalizare	**4p** **1p**
b)	$H(x)\cdot H(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a+\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\ln a=0\Rightarrow a=1$	**2p** **3p**
c)	$H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)=\begin{pmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln(2012!)\\0&0&2012\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln(2012!)\\0&0&2012\end{vmatrix}=2012^3$	**2p** **3p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot1^2-3\cdot1-1$ $f(1)=0\Rightarrow X-1\mid f$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-3$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15$	**1p** **1p** **3p**
c)	$f=X^3+3X^2-3X-1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$ $f(2)=13$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 15

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=0\\x-y+z=1\\x+y+az=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p | **a)** Calculați determinantul matricei asociate sistemului.
5p | **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.
5p | **c)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-1$.

5p | **a)** Arătați că $x*1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p | **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=4$.
5p | **c)** Determinați numărul natural n, $n\geq2$, pentru care $C_n^1*C_n^2=14$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2a-4$	**3p**
b)	Matricea asociată sistemului este inversabilă $\Leftrightarrow -2a-4\neq 0$	**3p**
	$a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**2p**
c)	$\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-y+z=1\\ x+y=2\end{cases}$	**2p**
	$x=1,\ y=1,\ z=1$	**3p**
2.a)	$x*1=x+1-1=$	**4p**
	$=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
b)	$x*x=2x-1$	**2p**
	$(x*x)*x=3x-2$	**2p**
	$x=2$	**1p**
c)	$C_n^1=n,\ C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$n^2+n-30=0$	**2p**
	Finalizare: $n=5$	**1p**

EXEMPLUL 16

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei A.

5p **b)** Verificaţi dacă $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvaţi ecuaţia $A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^3+\hat{2}X^2$ şi mulţimea $G=\left\{g=aX^3+bX^2+cX+d\,\middle|\,a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinaţi rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$	**3p**
	Calculul determinantului: $\det(A)=1$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sau	**2p**
	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	Deci $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$	**1p**
c)	Prin înmulţire cu A^{-1} la stânga se obţine $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(\hat{1})=\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}^2=$	**2p**
	$=\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$	**3p**
b)	$f=X^2(X+2)$	**2p**
	Rădăcinile lui *f* sunt $\hat{0},\hat{0}$ şi $\hat{1}$	**3p**
c)	$\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}\Rightarrow a,b,c,d$ pot lua câte trei valori fiecare	**3p**
	Deci *G* are $3^4=81$ elemente	**2p**

EXEMPLUL 17

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&3&-1\\m&0&2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y-z=-2\\x+3y-z=-2\\mx+2z=4\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei *A*.

5p **b)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea *A* este inversabilă.

5p **c)** Rezolvaţi sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Demonstraţi că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p	**c)** Dați exemplu de două numere $a,b \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{vmatrix}=$ $=6+m+0+3m+0+2=8+4m$	**3p** **2p**
b)	A inversabilă $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0 \Leftrightarrow 8+4m\neq 0$ $m\in\mathbb{R}-\{-2\}$	**3p** **2p**
c)	Pentru $m=-1$ rezultă $\det(A)=4\neq 0$ Se obține $x=y=0, z=2$	**2p** **3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$ $=2(x-1)(y-1)+1$	**2p** **3p**
b)	$x\circ e=x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2(x-1)(e-1)+1=x$ Finalizare: $e=\frac{3}{2}$	**2p** **3p**
c)	Un exemplu este $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ $\frac{5}{2}\circ\frac{5}{3}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+1=3\in\mathbb{Z}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 18

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați A^2-A.
5p	**b)** Determinați inversa matricei *A*.
5p	**c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
	2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.
5p	**a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.
5p	**b)** Determinați rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $A^2-A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p** **2p**

b)	$\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	**1p** **2p** **2p**
c)	Prin înmulțire la stânga cu A^{-1} se obține $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2009 & 2010 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$f(\hat{0}) = \hat{0}$ $f(\hat{1}) = \hat{2}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{2}$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f(\hat{0}) = \hat{0}, f(\hat{1}) = \hat{2}, f(\hat{2}) = \hat{0}$ Rădăcinile lui *f* sunt $\hat{0}$ şi $\hat{2}$	**3p** **2p**
c)	$g(\hat{0}) = a, g(\hat{1}) = a, g(\hat{2}) = \hat{2} + a$ $g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = a + a + \hat{2} + a = \hat{2}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = \hat{2}, \forall a \in \mathbb{Z}_3$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 19

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei *A*.

5p **b)** Rezolvați sistemul pentru $m = 0$.

5p **c)** Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x-4)(y-4) + 4$.

5p **a)** Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Demonstrați că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.

5p **c)** Calculați $1 * 2 * 3 * ... * 2010$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=$ $=m^2+1-m-m=$ $=(m-1)^2$	**1p** **3p** **1p**
b)	$\begin{cases} y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$	**2p** **3p**
c)	$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ Scăzând ultimele 2 ecuații se obține $0=3 \Rightarrow$ sistem incompatibil.	**2p** **3p**
2.a)	$(x*y)*z=(x*y-4)(z-4)+4=$ $((x-4)(y-4)+4-4)(z-4)+4=$ $=(x-4)(y-4)(z-4)+4=$ $=(x-4)((y-4)(z-4)+4-4)+4=$ $=(x-4)(y*z-4)+4=$ $=x*(y*z)$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
b)	$\left.\begin{array}{l} x>4 \Rightarrow x-4>0 \\ y>4 \Rightarrow y-4>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-4)(y-4)>0$ $(x-4)(y-4)+4>4, \forall x,y>4$	**3p** **2p**
c)	$x*4=4*x=4, \forall x \in \mathbb{R}$ $1*2*3*...*2010=(1*2*3)*4*(5*...*2010)=$ $=4$	**2p** **1p** **2p**

EXEMPLUL 20

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, unde $x,y \in \mathbb{Z}$.
5p	**a)** Calculați $D(-1,1)$.
5p	**b)** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $D(x,2010)=1$.
5p	**c)** Demonstrați că $D(x,y)\cdot D(x,-y)=D\left(x^2,y^2\right)$, oricare ar fi $x,y \in \mathbb{Z}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
5p **b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.
5p **c)** Calculați $1 * 2 * \ldots * 2011$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$D(-1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2$	**3p**
b)	$D(x,2010) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2010 \\ 1 & x+1 & 2011 \end{vmatrix} =$	**1p**
	$= x - 2010$	**2p**
	$x - 2010 = 1 \Rightarrow x = 2011 \in \mathbb{Z}$	**2p**
c)	$D(x,y) = x - y$	**2p**
	$D(x,-y) = x + y$ şi $D(x^2, y^2) = x^2 - y^2$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$x * y = 2xy - 6x - 6y + 21 = 2x(y-3) - 6(y-3) + 3 =$	**3p**
	$= (y-3)(2x-6) + 3 = 2(x-3)(y-3) + 3$	**2p**
b)	$(x * y) * z = 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3$	**2p**
	$x * (y * z) = 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3$	**2p**
	Finalizare	**1p**
c)	$x * 3 = 3 * x = 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$(1 * 2) * 3 * (4 * \ldots * 2011) = 3$	**2p**

EXEMPLUL 21

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$, unde m este parametru real.
5p **a)** Calculați determinantul matricei A.
5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1, 2, 5)$ este o soluție a sistemului.
5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0,0,0)$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.
5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.
5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.
5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 * 2 = x * 4$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=m^2-2+1-m-2m+1=$	**3p**
	$=m^2-3m$	**2p**
b)	$\begin{cases} -m-2+5=0 \\ -1+2m-5=0 \\ -1-4+5=0 \end{cases}$	**3p**
	$m=3$	**2p**
c)	$\det A\neq 0$	**2p**
	$m^2-3m\neq 0$	**1p**
	$m\in\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$	**2p**
2.a)	$(x*y)*z=(xy+x+y)*z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(yz+y+z)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z$	**2p**
	$(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$ legea "$*$" este asociativă	**1p**
b)	Există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x*e=x\Rightarrow xe+e=0;\ e*x=x\Rightarrow ex+e=0$	**2p**
	$e=0\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$x^2*2=3x^2+2$	**1p**
	$x*4=5x+4$	**1p**
	$x^2*2=x*4\Rightarrow 3x^2-5x-2=0$	**1p**
	$x=-\frac{1}{3}$ sau $x=2$	**2p**

EXEMPLUL 22

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.
5p	**a)** Calculaţi A^2-3A.
5p	**b)** Demonstraţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.
5p	**c)** Arătaţi că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.
	2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 şi x_3.
5p	**a)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.
5p	**b)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.
5p	**c)** Arătaţi că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**3p**
	$3A=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^2-3A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	**1p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+bA+aA+abA^2=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+3abA=$	**1p**
	$=I_2+(a+b+3ab)A=X(a+b+3ab)$	**2p**
c)	$X(a)=I_2+aA=\begin{pmatrix}1+a&-a\\-2a&1+2a\end{pmatrix}$	**2p**
	$X(a)$ matrice inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a)\neq 0$	**1p**
	$1+3a\neq 0\Rightarrow a\neq -\dfrac{1}{3}$	**1p**
	Deoarece $-\dfrac{1}{3}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow X(a)$ este matrice inversabilă oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$	**1p**
2.a)	Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=-2$ şi $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-5$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3)=$	**2p**
	$=14$	**1p**
b)	$x_1x_2x_3=-m$	**1p**
	$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\dfrac{5}{m}$	**2p**
	$x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{2}$	**2p**
c)	$\Delta=(x_1+x_2+x_3)\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)=$	**3p**
	$=-2(-5-14)=38\in\mathbb{N}$	**2p**

EXEMPLUL 23

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n,3^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2 şi A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e=3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea		**30 de puncte**
1.a)	$A_0(1,1)$, $A_1(2,3)$	**1p**
	$A_0A_1: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**2p**
	$A_0A_1: y = 2x - 1$	**2p**
b)	$A_1(2,3)$, $A_2(4,9)$, $A_3(8,27)$	**2p**
	Verificarea faptului că $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$	**3p**
c)	$A = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$	**1p**
	$\Delta = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6^n$	**3p**
	$\frac{2 \cdot 6^n}{2} = 216 \Rightarrow n = 3$	**1p**
2.a)	$x \circ 3 = \frac{1}{2}(x \cdot 3 - x - 3 + 3) = x$	**2p**
	$3 \circ x = \frac{1}{2}(3 \cdot x - 3 - x + 3) = x$	**2p**
	Deci $x \circ 3 = 3 \circ x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$	**1p**
b)	Căutăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \circ 2 = 2 \circ a = 3$	**1p**
	$2 \circ a = a \circ 2$	**1p**
	$\frac{1}{2}(2a - 2 - a + 3) = 3$	**1p**
	$a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$	**2p**
c)	Fie $x, y \in H \Rightarrow x = 2k+1, y = 2p+1,\ k, p \in \mathbb{Z}$	**1p**
	$x \circ y = \frac{1}{2}(4kp + 2k + 2p + 1 - 2k - 1 - 2p - 1 + 3)$	**2p**
	$x \circ y = 2kp + 1 \in H$	**2p**

EXEMPLUL 24

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A_n(n-1, n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Determinați ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ notăm $M_p = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, A_nA_p \le 2 \right\}$. Determinați elementele mulțimii M_{2011}.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m = 4$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.

5p **b)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II -lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_1(0,3)$, $A_2(1,4)$	**2p**
	$A_1A_2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**2p**
	$A_1A_2 : y = x + 3$	**1p**
b)	Justificarea faptului că $\begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
	$\Rightarrow A_m, A_n, A_p$ coliniare	**2p**
c)	$A_nA_{2011} \le 2$	**1p**
	$\sqrt{(n-2011)^2 + (n-2011)^2} \le 2$	**1p**
	$\lvert n-2011 \rvert \le \sqrt{2}$	**1p**
	$M_{2011} = \{2010, 2011, 2012\}$	**2p**
2.a)	$m = 4 \Rightarrow f = X^3 + X^2 - 17X + 15$	**1p**
	$C = X^2 + 4X - 5$	**3p**
	$R = 0$	**1p**
b)	$f \vdots (X-1) \Leftrightarrow f(1) = 0$	**1p**
	$f(1) = 1 + m - 3 - 17 + 2m + 7 = 3m - 12$	**2p**
	$3m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4$	**2p**
c)	Cu notația $3^x = y > 0 \Rightarrow y^3 + y^2 - 17y + 15 = 0 \Rightarrow (y-1)(y-3)(y+5) = 0$	**2p**
	$y = -5 < 0$	**1p**
	$y = 1 \Rightarrow x = 0$	**1p**
	$y = 3 \Rightarrow x = 1$	**1p**

LECȚII DE SINTEZĂ

în vederea pregătirii sesiunii iulie-august a examenului de

BACALAUREAT 2012 - M2

pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică,
profil: servicii, resurse naturale şi protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

MATEMATICĂ

TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

Argument:

Prezentul breviar teoretic are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim / mediu de competență şi nu reprezintă o listă exhaustivă.
De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență în funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

TEMA 3. Analiză matematică - clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.1.1. Limite de funcții - clasa a XI-a (3h/săpt.)
3.1.2. Funcții continue – clasa a XI-a (3h/săpt.)
3.1.3. Funcții derivabile – clasa a XI-a (3h/săpt.)
3.1.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor – clasa a XI-a (3h/săpt.)

3.1.1. Limite de funcții - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală:

→ *intervale de numere reale*;

→ *mărginire*: spunem că mulțimea nevidă $M \subset \mathbb{R}$ este mărginită dacă există $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $a \le x \le b$, oricare ar fi $x \in M$;

→ *vecinătăți*: spunem că mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ este vecinătate a punctului $x \in \mathbb{R}$ dacă există $a \in \mathbb{R}, a > 0$ astfel încât $(x-a, x+a) \subseteq V$; spunem că mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ este vecinătate a punctului $x = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă există $a \in \mathbb{R}, a > 0$ astfel încât $(a, +\infty) \subseteq V$; spunem că mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ este vecinătate a punctului $x = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă există $a \in \mathbb{R}, a > 0$ astfel încât $(-\infty, -a) \subseteq V$;

→ *dreapta reală încheiată*: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$.

→ *limite de funcții*; notație $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, x_0 punct de acumulare finit sau infinit al domeniului de definiție al funcției f ;

→ *limite laterale*:

a) $l_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ limita la stânga punctului x_0

b) $l_d(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ limita la dreapta punctului x_0

→ introducerea noțiunii de limită în relație cu reprezentare grafică pentru funcțiile studiate (de exemplu, funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcția putere $(n = 2, 3)$, funcția radical de ordin 2;

→ studiul existenței şi valoarea limitei unei funcții într-un punct, prin verificarea existenței şi egalității limitelor laterale;

→ *calculul limitelor într-un punct pentru funcțiile elementare*, identificarea limitelor funcțiilor elementare la capetele domeniilor de definiție;

→ *operații cu limite de funcții*: $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazul de nedeterminare $\infty - \infty$); $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$); $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$); $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazurile de nedeterminare $1^{\infty};0^0;\infty^0$); în acest ultim caz se poate utiliza formula $a^b=e^{b\cdot\ln a}$, care transformă cazurile de nedeterminare de la puteri în cazul $0\cdot\infty$.

→ *calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcția putere* $(n=2,3)$, *funcția radical de ordin 2, funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2;*

→ *metode de eliminare a nedeterminărilor*/cazurilor exceptate în cazul limitelor de funcții: $0/0,\quad \infty/\infty,\quad 0\cdot\infty$

→ *limitele funcțiilor raționale*: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$, unde $a_0,..., a_n, b_0,..., b_m\in\mathbb{R}$, $n, m\in\{1,2\}$ şi $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$; se abordează pe 3 cazuri, după tipul lui x_0:

1) x_0 finit şi $g(x_0)\neq 0$; în acest caz $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$; de exemplu, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{1^2-1+1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$;

2) $x_0\in\{\pm\infty\}$; în acest caz avem $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \mathrm{sgn}(\frac{a_n}{b_m})\cdot(\pm\infty)^{n-m} & n>m\end{cases}$;

de exemplu, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4}{16-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4}{-x+16}=\mathrm{sgn}\left(\frac{2}{-1}\right)\cdot(-\infty)^{2-1}=+\infty$;

3) x_0 finit şi $g(x_0)=0$, cu subcazurile:

- $f(x_0)=0$, caz în care avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$ iar fracția se poate simplifica prin factorul $(x-x_0)$
- $f(x_0)\neq 0$, caz în care avem o situație de tipul $\frac{c}{0}$, $c\neq 0$ ce necesită determinarea semnului numitorului într-o vecinătate a lui x_0 şi, după caz, o discuție pe limite laterale; de exemplu, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

→ *Asimptotele graficului pentru funcțiilor studiate* (de exemplu, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2):

- *asimptotă verticală* dreapta $x=a\in\mathbb{R}$, dacă au sens şi există:
  - i) $l_s(a)=\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=\pm\infty$
  - ii) $l_d(a)=\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=\pm\infty$
- *asimptotă orizontală*, dacă $+\infty$ sau/şi $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției:
  - i) *la* $+\infty$, dreapta $y=b$, dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$
  - ii) *la* $-\infty$, dreapta $y=b$, dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$
- *asimptotă oblică*, dacă $+\infty$ sau/şi $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției:
  - i) *la* $+\infty$, dreapta $y=mx+n$, dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=n\in\mathbb{R}$
  - ii) *la* $-\infty$, dreapta $y=mx+n$, dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=n\in\mathbb{R}$.

3.1.2. Funcții continue - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Interpretarea grafică a continuității unei funcții într-un punct / pe o mulțime.
Continuitatea funcției într-un punct x_0, punct de acumulare al domeniului de definiție: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Operații cu funcții continue (suma, produsul, raportul, ridicarea la putere);
Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul lor de definiție.
Semnul unei funcții continue pe un interval – consecințe ale proprietății lui Darboux:

a) dacă o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ şi dacă $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$; dacă, în plus, funcția este strict monotonă sau injectivă, atunci punctul c este unic; proprietatea este utilă în determinarea numărului de soluții reale ale unei ecuații;
b) dacă o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ şi nu se anulează pe acest interval, atunci funcția f păstrează semn constant pe tot intervalul dat. (în acest caz $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$); proprietatea este utilă în rezolvarea de inecuații; enunțarea acestei proprietăți şi alegerea unei abscise convenabile din intervalul dat în care să calculăm valoarea funcției, permite stabilirea semnului funcției pe acel interval ca fiind semnul valorii calculate a funcției.

3.1.3. Funcții derivabile - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Tangenta la o curbă (prin reprezentare grafică) ca interpretare geometrică a existenței derivatei unei funcții într-un punct.
Derivata funcției f în punctul x_0, punct de acumulare al domeniului de definiție: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

- dacă $f'(x_0)\in\{\pm\infty\}$ spunem că f are derivată în x_0, dar nu e derivabilă şi reprezentarea grafică a funcției admite tangentă verticală în punctul x_0;
- dacă $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ spunem că f este derivabilă în x_0 şi reprezentarea grafică a funcției admite tangentă oblică sau orizontală în x_0;
- dacă nu există $f'(x_0)$, spunem că funcția nu este derivabilă şi nu are derivată în punctul respectiv.

Recunoaşterea limitei raportului prin care se defineşte derivata unei funcții într-un punct, ca metodă de calcul a limitelor de funcții;

Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(x_0,y_0)$ (cu verificarea prealabilă a derivabilității funcției în punctul x_0) este $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.
Funcții derivabile (derivabile în orice punct al domeniului de definiție): exemple de funcții elementare, operații cu funcții care admit derivată / sunt derivabile.
Calculul derivatelor de ordin I şi II pentru funcțiile studiate cu ajutorul tabelelor derivatelor funcțiilor elementare şi utilizarea de reguli / operații cu funcții derivabile:
→ *derivata sumei* a două funcții derivabile: $(f+g)'=f'+g'$; *derivata produsului* de funcții derivabile: $(f\cdot g)'=f'g+fg'$, caz particular $(c\cdot f)'=c\cdot f'$, unde c este constantă.

→ *derivata raportului* (în condiții de bună definire), $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$, caz particular $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=-\dfrac{f'}{f^2}$.

Regulile lui l'Hospital pentru cazurile de nedeterminare $0/0$, ∞/∞; cu verificarea în prealabil a condițiilor de aplicabilitate, evidențierea cazului de nedeterminare şi aplicarea regulii (derivarea separat a numărătorului şi separat a numitorului, se va insista a nu se face confuzie cu derivata raportului).

3.1.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Rolul primei derivate în studiul funcțiilor, rol implicat de consecințele teoremei Lagrange: determinarea intervalelor de monotonie şi a punctelor de extrem ale funcției *f* prin:
→ calculul derivatei funcției şi a domeniului de derivabilitate;
→ rezolvarea ecuației $f'(x)=0$ (determinarea punctelor critice);
→ determinarea intervalelor în care funcției f' are semn constant prin utilizarea consecințelor proprietății lui Darboux;
→ interpretarea semnului lui f' în stabilirea intervalelor de monotonie pentru funcția f şi a tipului de monotonie pe fiecare dintre intervale ($f'\geq 0$ pe $I \Rightarrow f$ crescătoare pe I, $f'\leq 0$ pe $I \Rightarrow f$ descrescătoare pe I)
→ interpretarea succesiunii intervalelor de semn al derivatei funcției, pentru stabilirea extremelor / tipului de extrem pentru funcția dată;
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor, cu aceleaşi etape ca în cazul primei derivate ($f''(x)=0$, stabilirea semnului celei de-a doua derivate, interpretarea semnului şi determinarea intervalelor de concavitate – convexitate, stabilirea punctelor de inflexiune ale funcției *f*, ca urmare a alternanței intervalelor de semn ale funcției f''.
Reprezentarea grafică a funcțiilor elementare: parcurgerea etapelor studiului funcției; concluzionarea asupra unor particularități ale funcției evidențiate prin construcția tabelului de variație al funcției.

TEMA 3. Analiză matematică - clasa a XI-a , clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.2.1. Primitive(antiderivate) – clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.2.2. Integrala definită – clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.2.3. Aplicații ale integralei definite – clasa a XII-a (3h/săpt.)

3.2.1. Primitive (antiderivate) – clasa a XII-a (3h/săpt.)

Primitivă/primitive, definiție: se consideră o funcție $f: I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, funcția $F: I \to \mathbb{R}$ se numeşte primitiva funcției f dacă:

a) F este derivabilă pe I
b) $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$.

Dacă există o primitivă F a funcției f, atunci f admite primitive pe intervalul I şi pentru orice primitivă $G: I \to \mathbb{R}$ a lui f, există o funcție constantă $c: I \to \mathbb{R}, c(x)=c$ astfel încât $G=F+c$.
În acest caz, mulțimea tuturor primitivelor funcției f este $\{F+\mathcal{C} / \mathcal{C}$ este mulțimea constantelor$\}$; mulțimea tuturor primitivelor funcției f se numeşte *integrala nedefinită* a funcției f şi se notează $\int f(x)\, dx = F(x)+\mathcal{C}$.
Orice funcție continuă f admite primitive (rezultat care va fi utilizat pentru a argumenta faptul că o funcție admite primitive, neimplicând şi determinarea unei primitive sau a integralei nedefinite).
Proprietate $\int f'(x)dx = f(x)+\mathcal{C}$.
Dacă funcțiile $f, g: I \to \mathbb{R}$ admit primitive şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci funcțiile $f+g$ şi αf admit primitive şi au loc relațiile: $\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ şi $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$.
Dându-se două funcții $f, F: I \to \mathbb{R}$, a verifica faptul că F este o primitivă a lui f presupune sau calcularea $\int f(x)\, dx$ sau utilizarea definiției (utilizându-se formule de derivare şi/sau proprietăți).
Primitive uzuale: tabelele de formule asociate funcțiilor elementare/compunerii de funcții elementare.
Pentru calcularea unei primitive sunt necesare: cunoaşterea tabelului de primitive uzuale, aplicarea de proprietăți ale primitivelor şi, uneori, abilități de prelucrare algebrică a integrantului.

3.2.2. Integrala definită - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Integrala definită formula Leibniz – Newton: dacă $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, integrala definită a funcției f pe intervalul $[a,b]$ este numărul real $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$.

Observație: integrala nedefinită a unei funcții reprezintă o familie de funcții, iar integrala definită a aceleiași funcții reprezintă un număr real.

Proprietăți ale integralei definite:

1. Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul $[a,b]$ și $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci
$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$ (*proprietatea de liniaritate*).

2. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă pe intervalul $[a,b]$ și $f\geq 0$, atunci $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ (*proprietatea de păstrarea semnului*, obținută ca o consecință a teoremei de medie).

3. Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul $[a,b]$ și $f\geq g$, atunci $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$ (*proprietatea de monotonie*, utilizată, de exemplu, în verificarea unor inegalități sau în stabilirea monotoniei unui șir de integrale nedefinite).

4. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă pe intervalul $[a,b]$ atunci pentru oricare $c\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (*proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare*, utilizată, de exemplu, pentru calculul integralei definite atunci când integrantul este reprezentat de o funcție ce trebuie explicitată –funcție definită prin mai multe legi, de exemplu, funcția modul).

Metode de calcul a integralelor definite:

i) *Metoda integrării prin părți*:

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivatele $f',g':[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, atunci
$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b+\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$.

Metoda presupune următoarea schemă de abordare:

→ evidențierea, în scrierea integrantului, a unui produs de două funcții (de exemplu, $f=1\cdot f$, $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\ln x$), dintre care una să reprezinte o primitivă a unei funcții; în general, alegerea celor două funcții f și g' se realizează astfel încât integrala nedefinită obținută să fie una mai ușor de calculat;

→ determinarea expresiilor funcțiilor f' și g;

→ finalizarea calculului prin determinarea integralei nedefinite $\int_a^b f'(x)g(x)dx$.

În anumite exerciții se poate aplica iterativ metoda integrării prin părți.

ii) *Metoda schimbării de variabilă*:

Se consideră intervalul $I\subseteq\mathbb{R}$ și funcțiile $u:[a,b]\to I$ și $f:I\to\mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

1. f continuă pe I
2. u derivabilă pe $[a,b]$ cu derivata u' continuă pe $[a,b]$.

Atunci $\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)}f(t)dt$, unde $u(x)=t$ și $u'(x)dx=dt$.

Utilizarea metodei schimbării de variabilă poate fi formalizată astfel:

- identificarea notației (schimbării de variabilă) $u(x)=t\Rightarrow\begin{cases}x=a & \Rightarrow t=u(a)\\ x=b & \Rightarrow t=u(b)\end{cases}$
- asocierea notației cu diferențierea formală $u'(x)\cdot dx=dt$
- rescrierea integrantului folosind substituțiile variabilei, a capetelor de integrare și a lui dx

iii) *Metoda de calcul a integralelor de forma* $\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad$Q\leq 4$, prin descompunere în fracții raționale simple:

a) se scrie funcția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sub forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ (ca urmare a aplicării teoremei împărțirii cu rest $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$)

b) se descompune funcția rațională $\frac{R(x)}{Q(x)}$ în fracții raționale simple

c) se aplică proprietatea de liniaritate a integralelor definite.

3.2.3. Aplicații ale integralei definite - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Aria unei suprafețe plane:

i) Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci aria S a suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuație $x = a$ şi $x = b$ este dată de relația $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

ii) Fie funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Dacă $f(x) \geq g(x)$ pe intervalul dat, atunci aria S a suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții, pe intervalul $[a, b]$, este dată de relația $S = \int_a^b (f(x)dx - g(x))dx$.

Volumul unui corp de rotație:

Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci volumul V al corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției f este dat de relația $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

EXEMPLE DE ITEMI TIP EXAMEN DE BACALAUREAT PENTRU RECAPITULAREA NOȚIUNILOR DIN TEMA 3

EXEMPLUL 25

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.
5p	**c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x+1}dx$.
5p	**a)** Calculați I_1.
5p	**b)** Arătați că $I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
5p	**c)** Demonstrați că $\dfrac{1}{4026}\le I_{2012}\le\dfrac{1}{2013}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{4x\left(x^2+2\right)-2x\left(2x^2-1\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}=2$	**3p**
	Ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției *f* spre $+\infty$ este $y=2$	**2p**
c)	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	$0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{3}$, oricare ar fi $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\left(\dfrac{x^n}{x+1}+\dfrac{x^{n+1}}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\dfrac{x^n(x+1)}{x+1}dx=\dfrac{1}{n+1}$	**3p**

c)	$\frac{x^{2012}}{2} \le \frac{x^{2012}}{x+1} \le \frac{x^{2012}}{1}$ pentru orice $x \in [0, 1]$	2p
	$\int_0^1 \frac{x^{2012}}{2} dx \le \int_0^1 \frac{x^{2012}}{x+1} dx \le \int_0^1 x^{2012} dx$	1p
	$\frac{1}{4026} \le I_{2012} \le \frac{1}{2013}$	2p

EXEMPLUL 26

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția *f* este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.
5p	**a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției *f*.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	*f* derivabilă în $x=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$	2p
	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$	2p
	Finalizare	1p
b)	*f* este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$	2p
	$f'(x)=0 \Rightarrow x=4$	1p
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(4,+\infty) \Rightarrow$ funcția *f* crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$	2p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)=+\infty$	3p
	$x=0$ este ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*	2p
2.a)	F este derivabilă şi $F'(x)=xe^x+e^x-e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	3p
	$F'=f$	2p
b)	$\int_1^e f(\ln x)\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=$	2p

	$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	1p
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	2p
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x=$	1p
	$=\pi\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\frac{e^{2x}}{2}\Big\|_1^2=$	2p
	$=\frac{\pi e^2\left(e^2-1\right)}{2}$	2p

EXEMPLUL 27

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

$ **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2012}+x^{2011}+x^2+x$.

5p **a)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției *f*, care verifică relația $F(0)=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R},\quad g(x)=f(x)-x^{2012}-x^{2011}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x+1)'\cdot e^x-(x+1)\cdot\left(e^x\right)'}{e^{2x}}=-\frac{x}{e^x},\ \forall x\in(0,+\infty)$	3p
	Finalizare	2p
b)	$f'(x)=-\frac{x}{e^x}\Rightarrow f'(x)<0$, oricare ar fi $x>0$	3p
	Finalizare	2p
c)	$g(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$	1p
	$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=1$	1p

	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=2$	1p
	$y=x+2$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției g.	2p
2.a)	$\int f(x)dx=\frac{x^{2013}}{2013}+\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$	2p
	$F(x)=\frac{x^{2013}}{2013}+\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$ şi $F(0)=1\Rightarrow c=1$	2p
	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^{2013}}{2013}+\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+1$	1p
b)	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\left(x^{2011}+x\right)dx=$	2p
	$=\left(\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2012}+\frac{1}{2}=\frac{1007}{2012}$	3p
c)	$g(x)=x^2+x$	1p
	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^4+2x^3+x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_1^2=$	3p
	$=\frac{481\pi}{30}$	1p

EXEMPLUL 28

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $-1\le\frac{x+1}{3}\le 1$.
5p	**2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(-1,2)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3)-\log_2 x=2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n\ge n^2$.
5p	**5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,-1)$, $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=6$ şi $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1\le\frac{x+1}{3}\le 1\Rightarrow -3\le x+1\le 3$	2p
	$-4\le x\le 2\Rightarrow x\in[-4,2]$	2p
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$	1p

2.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=2 \\ f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=2 \\ a-b+c=2 \end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases} c=0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-x$	**2p**
3.	Condiții $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,+\infty)$	**1p**
	$\log_2 \frac{x+3}{x}=2$	**2p**
	$x=1\in(0,+\infty)$	**2p**
4.	$p=\frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$	**1p**
	Cazuri posibile sunt 4	**1p**
	Cazuri favorabile sunt 3	**2p**
	$p=\frac{3}{4}$	**1p**
5.	$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{i}-\vec{j}=5\vec{i}-\vec{j}$	**3p**
	$C(5,-1)$	**2p**
6.	Din teorema sinusului $\frac{AB}{\sin C}=2R \Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}$	**3p**
	$R=\frac{6}{2\cdot\frac{1}{2}}=6$	**2p**

EXEMPLUL 29

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2x-5$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției *f* este egală cu 2.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$.
5p	**4.** Calculați $C_6^2-A_4^2$.
5p	**5.** În sistemul de coordonate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ și $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul *O* la mijlocul segmentului (AB).
5p	**6.** Calculați $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)=\log_2(9-5)=$	**3p**
	$=\log_2 4=2$	**2p**

2.	$-\frac{b}{2a}=2$ $-\frac{2}{2m}=2$ $m=-\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^{1-x^2}=3^{-3}\Rightarrow 1-x^2=-3$ $x^2=4\Rightarrow x\in\{2,-2\}$	**3p** **2p**
4.	$C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ $A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=12$ $C_6^2-A_4^2=3$	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă C este mijlocul lui $(AB)\Rightarrow C(4,3)$ $OC=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$ $OC=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$ $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ=0$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 30

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3$, $AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$ $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}=0$	**2p** **2p** **1p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=2$ $V(1,2)$	**2p** **2p** **1p**

3.	$3^{x^2-1}=1$ $x^2-1=0$ $x\in\{-1,1\}$	**1p** **2p** **2p**
4.	$A_4^3=$ $=24$	**2p** **3p**
5.	$\vec{w}=2\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)-\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)=$ $=3\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\vec{w}(3,-5)$	**2p** **3p**
6.	$BC=5$ $h=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 31

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_3=5$ şi $a_5=11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1, g(x)=x+3$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor *f* şi *g*.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculaţi $a\cdot b$ ştiind că $a+b=150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.

5p **5.** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ şi $C\left(m+1,m^2\right)$ sunt coliniare.

5p **6.** Calculaţi $\cos x$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{3}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases}a_1+2r=5\\a_1+4r=11\end{cases}\Rightarrow a_1=-1, r=3$ $a_7=a_1+6r=17$, $S_7=56$	**3p** **2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-1=x+3$ $x=4$ şi $y=7$ $A(4,7)$	**2p** **2p** **1p**
3.	Prin ridicare la puterea a 3-a se obţine $x^2-1=8$ $x=\pm3$	**1p** **2p** **2p**
4.	$a+b=150\Rightarrow\frac{b}{4}+b=150\Rightarrow b=120$ $a=30$ $a\cdot b=3600$	**3p** **1p** **1p**
5.	$AB:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{2}\Rightarrow x-y+1=0$ $C\in AB\Rightarrow m^2-m-2=0$ $m=-1$ sau $m=2$	**2p** **2p** **1p**

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 32

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ se cunosc $a_2=6$ şi $a_3=5$. Calculaţi a_6.
5p	**2.** Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $2x^2-x-3\le 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)=1$.
5p	**4.** După o scumpire cu 5%, preţul unui produs creşte cu 12 lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.
5p	**6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $BC=9$ şi $m(\sphericalangle BAC)=120^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases}a_2=6\\a_3=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=7\\r=-1\end{cases}$ $a_6=a_1+5r$ $a_6=2$	**2p** **2p** **1p**
2.	$2x^2-x-3\le0\Rightarrow x\in\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=-1, x=0, x=1$	**3p** **2p**
3.	Condiţii de existenţă $\begin{cases}x+2>0\\x-4>0\end{cases}\Rightarrow x\in(4,+\infty)$ $\log_3\left(\frac{x+2}{x-4}\right)=1\Rightarrow\frac{x+2}{x-4}=3$ $x=7\in(4,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $5\%\cdot x=12$ lei $x=240$ lei	**3p** **2p**
5.	Se notează cu M mijlocul lui $[AB]$ şi cu d mediatoarea segmentului $[AB]$; atunci $M(3,2)$ $m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$ $d: y-2=1\cdot(x-3)\Rightarrow d: y=x-1$	**1p** **2p** **2p**
6.	Din teorema sinusului $\Rightarrow R=\frac{BC}{2\sin A}$ $\sin A=\sin120^\circ=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $R=3\sqrt{3}$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 33

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_6 3 + \log_6 12$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x + 7^{x+1} = 392$.
5p	**4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2 = 4A_n^1$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ şi $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.
5p	**6.** Calculați $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 36$	**3p**
	$\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$	**2p**
2.	$x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{4}$	**2p**
	$\Delta = -23$	**1p**
	$y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{23}{8}$	**2p**
3.	$7^x + 7^{x+1} = 392 \Leftrightarrow 7^x + 7^x \cdot 7 = 392$	**1p**
	$7^x \cdot 8 = 392 \Leftrightarrow 7^x = 49$	**2p**
	$x=2$	**2p**
4.	$\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 4\dfrac{n!}{(n-1)!}$	**2p**
	$\dfrac{n-1}{2} = 4$	**2p**
	$n=9$	**1p**
5.	$\sqrt{(4-0)^2 + (m+2)^2} = 5$	**1p**
	$m^2 + 4m - 5 = 0$	**2p**
	$m=-5, m=1$	**2p**
6.	$\cos 140^\circ = \cos\left(180^\circ - 40^\circ\right) = -\cos 40^\circ$	**3p**
	$\cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0$	**2p**

EXEMPLUL 34

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ şi $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = x-3$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p	**5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$.
5p	**6.** Calculați cosinusul unghiului M al triunghiului MNP știind că $MN=4$, $MP=5$ şi $NP=6$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2(x+1)=x-1+3x-1$ $2x=4 \Rightarrow x=2$	**2p** **3p**
2.	$f(5)=0$ $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**3p** **2p**
3.	Condiții $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[3,+\infty)$ $x-1=(x-3)^2 \Rightarrow x^2-7x+10=0$ $x=2$ sau $x=5$ $2\notin[3,+\infty)\Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate este A_7^2 $A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$	**2p** **3p**
5.	$\begin{cases} 2x-y-6=0 \\ -x+2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=6$ $d=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}$ $d=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos M=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2\cdot MN\cdot MP}$ $\cos M=\frac{1}{8}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 35

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_7(3+\sqrt{2})+\log_7(3-\sqrt{2})$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale a și b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2,3)$ și $B(-1,0)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de 2 cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ și $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.
5p	**6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=$	**3p**
	$=\log_7 7=1$	**2p**
2.	$A(2,3)\in G_f\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow 4+2a+b=3$	**2p**
	$B(-1,0)\in G_f\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow 1-a+b=0$	**2p**
	$a=0,b=-1$	**1p**
3.	$3^x+3\cdot 3^x=36$	**1p**
	$3^x=9$	**2p**
	$x=2$	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numerele divizibile cu 4: 12, 16,…,96 $\Rightarrow 22$ cazuri favorabile	**2p**
	Numerele de 2 cifre: $\overline{ab}, a\in\{1,2,...,9\}, b\in\{0,1,2,...,9\}\Rightarrow 90$ cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$	**3p**
	Coordonatele sunt $(1,2)$	**2p**
6.	$\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$	**3p**
	$l=4$	**2p**

EXEMPLUL 36

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=5$ şi $r=2$. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.
5p	**2.** Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^2-(m+1)x+m=0$ are soluții reale egale.
5p	**3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox şi respectiv Oy.
5p	**4.** Calculați $2C_4^2-3A_4^1$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=(a+3)\vec{i}+2\vec{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați numărul $a>0$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Aria triunghiului *MNP* este egală cu 16, iar $MN=NP=8$. Calculați $\sin N$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_5=\dfrac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}$	**3p**
	$S_5=45$	**2p**

2.	$\Delta = 0$ $m^2 + 2m + 1 - 4m = 0$ $m = 1$	**1p** **2p** **2p**
3.	$G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ $A(-1,0)$ $G_f \cap Oy : f(0) = 1$ $B(0,1)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
4.	$C_4^2 = 6$ $A_4^1 = 4$ $2C_4^2 - 3A_4^1 = 0$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\frac{2}{a+3} = \frac{a}{2}$ $a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ sau $a = -4$ $a > 0 \Rightarrow a = 1$	**2p** **2p** **1p**
6.	Aria $\Delta MNP = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2}$ $\sin N = \frac{2 \cdot 16}{8 \cdot 8}$ $\sin N = \frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**